Série 1b

Question 1.b1 – Section transversale variable

La barre conique ci-dessous est soumise à des charges axiales (F), comme illustré en Fig 1b1.

Comment est-ce que i) la force interne, ii) la contrainte interne et iii) la déformation relative évoluent du point A au point B ? (augmente, décroit, ne change pas ?)

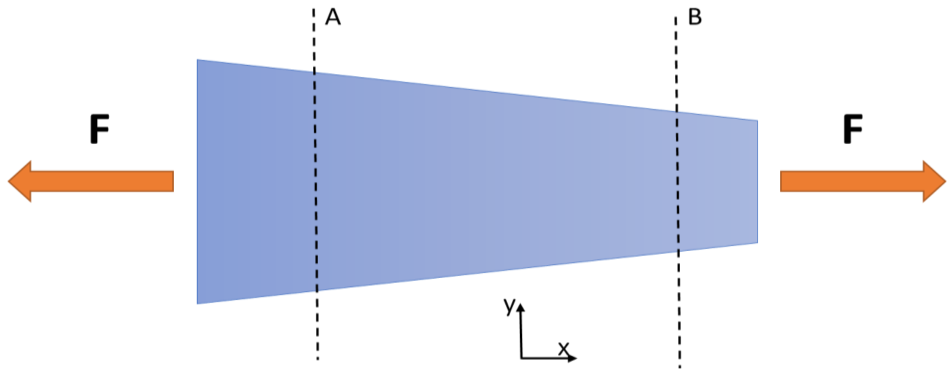

Fig 1b1 | Barre conique soumise à des charges axiales.

Solution 1b1

Force interne

La force interne ne dépend pas de la section (méthode des sections et équation d'équilibre) et **demeure donc constante** le long de la barre conique

Contrainte interne:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

La section décroît de A à B, et donc la contrainte **augmente** de A à B.

Déformation:

La loi de Hooke implique que la déformation relative est proportionnelle à la contrainte :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Par conséquent, la déformation relative **augmente** de A à B

Question 1b2 – Poutre collée

Une poutre de longueur L et de rayon r est soumise à une charge axiale F = 100 N.

Cette même poutre est : cas a) encastrée dans un mur indestructible; et cas b) collé à un support sur une longueur h=10 cm, tel qu'illustré en fig 1b2

La contrainte interne maximale que la poutre peut supporter est σ_{yield} = 50 MPa.

La contrainte interne maximale pour la colle est τ_{yield} = 25 MPa.

Déterminez le rayon minimal de la poutre avant défaillance de chaque système. Cette défaillance sera elle provoquée par la poutre ou par la colle?

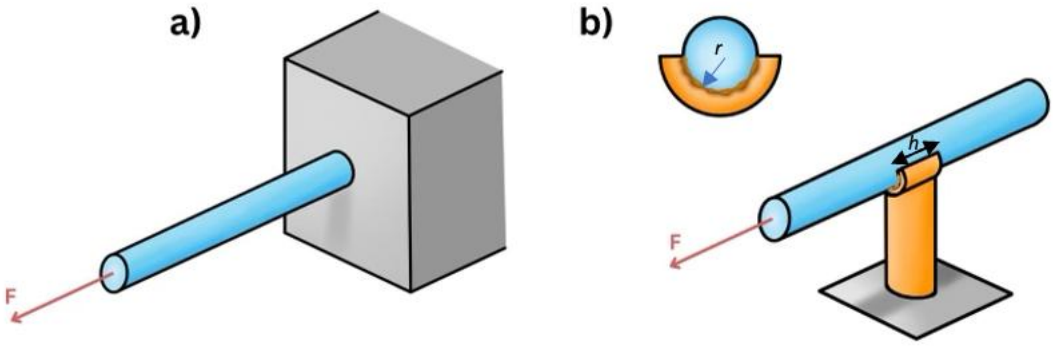

Fig 1b2 | poutre encastrée vs poutre collée. On a une vue de côté et une vue de face pour le cas b).

Solution 1b2

Objectifs: trouver

a- $contrainte\ interne\ normale\ \ \sigma$

b- $contrainte\ en\ cisaillement\ \ \tau$

c- Et donc le rayon de la poutre r à la défaillance

Paramètres donnés:

F, Force normale appliquée

L, longueur de la poutre

h, longueur de la zone de contact

σ_{max}, contrainte interne maximale

τ_{max}, contrainte en cisaillement maximale

Formules:

$$\sigma = \frac{N}{A_\perp}$$

Où $A_\perp$ est l'aire de la section transverse de la poutre, donné par :

$$A_\perp = \pi r^2$$

$$\tau = \frac{N}{A_{\parallel}}$$

Où $A_{\parallel}$ est l'aire de contact entre la poutre et son support donné par :

$$A_{\parallel} = \frac{2\pi r h}{2} = \pi r h$$

<u>Calcul:</u>

a. Dans ce cas, nous avons seulement une contrainte normale, constante le long de la poutre. La seule force externe appliquée sur la poutre est la force F. En utilisant l'équilibre des forces, on peut écrire:

$$N = F$$

$$\sigma_{normale} = \frac{F}{A_{\perp}} = \frac{F}{\pi r^2}$$

Ce qui implique:

$$r_{min,\sigma} = \sqrt{\frac{F}{\pi|\sigma_{max}|}}$$

b. Ici, nous avons deux contraintes : une normale dans la poutre (la même que ci-dessus), et aussi une contrainte de cisaillement sur la colle.

$$\tau = \frac{-F}{A_{\parallel}} = -\frac{F}{\pi r h}$$

On peut donc calculer le rayon interne maximal pour une défaillance en cisaillement:

$$r_{min,\tau} = \frac{F}{\pi h|\tau_{max}|}$$

<u>Application numérique:</u>

a.

$$r_{min,\sigma} = 0.80\ mm$$

b.

$$r_{min,\sigma} = 0.80\ mm. \qquad r_{min,\tau} = 0.13\ mm$$

$r_{min,\sigma} > r_{min,\tau}$. La défaillance provient donc de la contrainte maximale de la poutre, et non de la colle.

Question 1b3 – Contrainte interne et méthode des sections

Déterminez les contraintes internes sur les sections AB et AD, en sachant que leurs sections respectives sont de 2000 mm² and 1520 mm². La flexion des structures est négligée. Le treillis est en acier (E = 200 GPa).

Nous pouvons faire l'*hypothèse que les forces internes sont purement axiales*. Donc, lorsque vous utilisez la méthode des sections pour les forces internes, que des forces axiales ! Pensez ensuite à les décomposer selon les coordonnées x et y.

Indices :

- Commencez par calculer les réactions en A et en C, puis calculez les forces internes pour trouver les contraintes.
- Coupez tout le système, pas juste une barre !

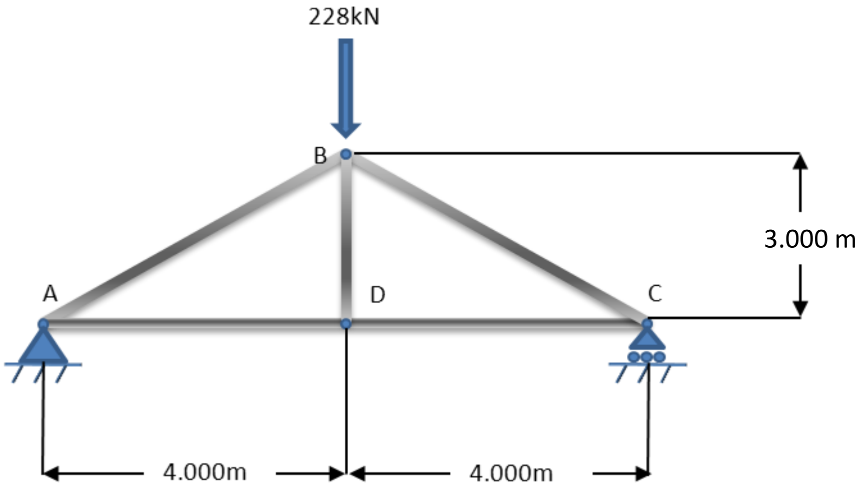

Fig 1b3.1 | Treillis en acier et les charges associées.

Solution 1b3

Paramètres donnés:

1. Force ponctuelle en B de 228 kN.
2. Support à roulement (non fixe) au point C.
3. Support fixe au point A.

A trouver:

Contraintes internes dans les sections AB et AD.

Méthodologie:

1) Dessiner le diagramme des forces de la structure au complet avec les supports aux points A et C, où des forces appropriées (de réaction) sont dessinées.

2) Appliquer la somme des forces et des moments de forces afin de trouver les forces externes (réaction) en A et en C.
3) Une fois les forces externes trouvées, appliquez la méthode des sections en découpant des sections de l'assemblage de poutres, en remplaçant chaque partie de poutre découpée par une force respective. Pour cette question, commencez par découper les poutres pour lesquelles on souhaite connaître les contraintes internes, c'est-à-dire les poutres AB et AD.
4) Trouver les forces internes en utilisant la somme des forces et des moments de force pour chaque sous-système.

Solution

1) Diagramme de forces de la structure

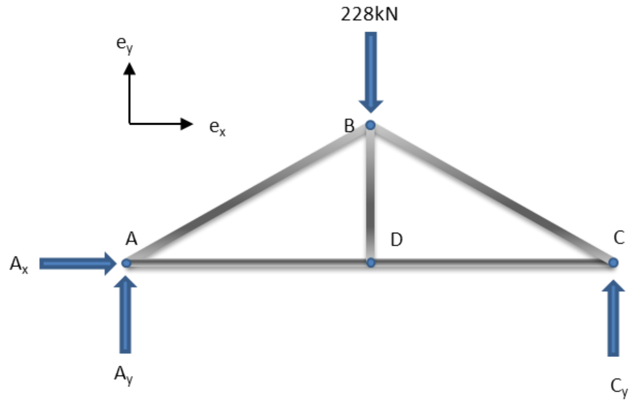

Fig 1b3.2 | Diagramme de forces

2) Appliquer la somme des forces et des moments de force (système de deux équations à deux inconnues) :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{A,x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{C,y} + F_{A,y} = F_{B,y} \ = 228\ kN$$

$$\sum M_z^A = 0 \rightarrow \left(2 \cdot L \cdot F_{C,y} - L \cdot F_{B,y}\right) = L \cdot \left(2 \cdot F_{C,y} - 228\ kN\right) = 0 \rightarrow F_{C,y} = 114\ kN$$

$$F_{A,y} = 114\ kN$$

3) Appliquer la méthode des sections en découpant les poutres AB et AD. Pour chaque poutre découpée, placez une force axiale correspondante. Pour F_{AB} décomposer la force axiale selon les composantes x et y.

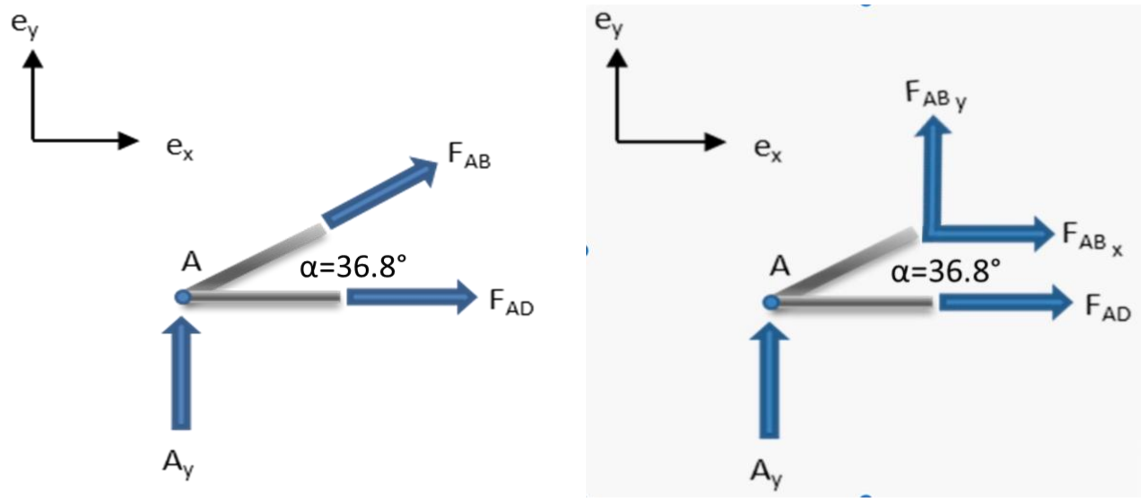

Fig 1b3.3 | Diagramme de forces de la section.

4) Appliquez la somme des forces et des moments de force au sous-système et trouvez les forces internes pour chaque section :

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB,y} + F_{A,y} = 0 \rightarrow F_{AB} \cdot sin\,(36.8°) = -F_{A,y} \rightarrow F_{AB} = -190\;kN$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AB,x} + F_{AD,x} = 0 \rightarrow F_{AD} = -F_{AB} \cdot cos\,(36.8°) = 152\;kN$$

5) Calculer les contraintes internes

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = -\frac{190 \cdot 10^3\;N}{2000 \cdot 10^{-6}\;m^2} = -95\;MPa\;(Compression)$$

$$\sigma_{AD} = \frac{F_{AD}}{A_{AD}} = \frac{152 \cdot 10^3\;N}{1520 \cdot 10^{-6}\;m^2} = 100\;MPa\;(Traction)$$

Question Courte 1b4 – Module de Young et diagramme de contrainte – déformation

Considérons une barre de longueur 1 cm, avec une section carrée de 1 mm de côté (voir fig 1b4). Les deux extrémités de la barre sont solidement attachées à un pull-tester longitudinal.

La barre est étirée. Après avoir atteint une déformation relative de 0.01 ainsi qu'une contrainte en traction sur l'axe longitudinal de 500 MPa, la barre casse. On suppose que le matériau est fragile (pas ductile, donc pas de déformation plastique).

Calculez le module de Young de ce matériau, la force au moment de la rupture et dessinez le diagramme de contrainte vs. déformation relative du matériau.

Mettez en évidence la contrainte et la déformation au moment de la rupture et indiquez la valeur de la pente de la courbe sur le graphe.

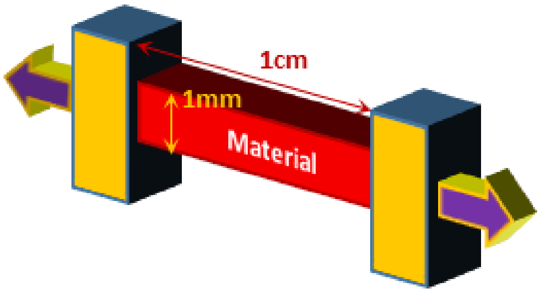

Fig 1b4.1 | Barre avec une section transversale carrée.

Solution 1b4

Diagramme de forces

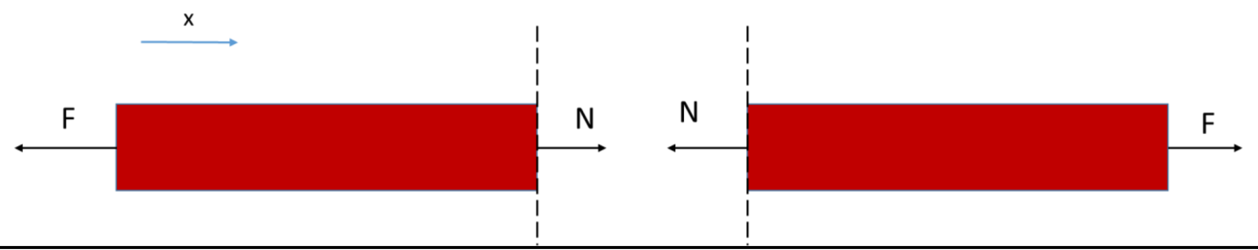

Fig 1b4.2 | Diagramme de forces

Objectifs

Module de Young E

Force au moment de la rupture F

Diagramme de contrainte – déformation relative

Paramètres donnés:

Longueur initiale: $L_0 = 1\ cm$ (paramètre non utilisé ici)

Largeur de la section transversale carrée: $b = 1\ mm$

Déformation relative au point de rupture: 0.01

Contrainte au point de rupture: $\sigma = 500\ MPa$

Principes et formules:

Loi de Hooke en 1D:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \qquad \text{Eq. (0.0.1)}$$

où σ est la contrainte dans le matériau, ε est la déformation relative axiale du matériau et E le module de Young du matériau. L'équation de la contrainte est aussi exprimée par:

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \text{Eq. (0.0.2)}$$

Où A est la section transversale de la barre, N la force interne de réaction à l'étirement et σ la contrainte interne correspondante.

Calcul:

Le calcul du module de Young s'effectue directement avec l'équation Eq. (0.0.1):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \qquad \text{Eq. (0.0.3)}$$

A l'équilibre, on utilise l'équation Eq. (0.0.2) pour calculer la force externe:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{b^2} \rightarrow F = b^2\sigma \qquad \text{Eq. (0.0.4)}$$

Réponse

$$E = 50\ GPa; \qquad F = 500\ N$$

Sur la base des calculs précédents, on dessine le diagramme contrainte – déformation relative du matériau (Figure 1b4.3). Le matériau est fragile. Par conséquent, le diagramme contrainte – déformation relative est donc uniquement composé d'une région élastique, linéaire avant la rupture. Le module de Young est la pente.

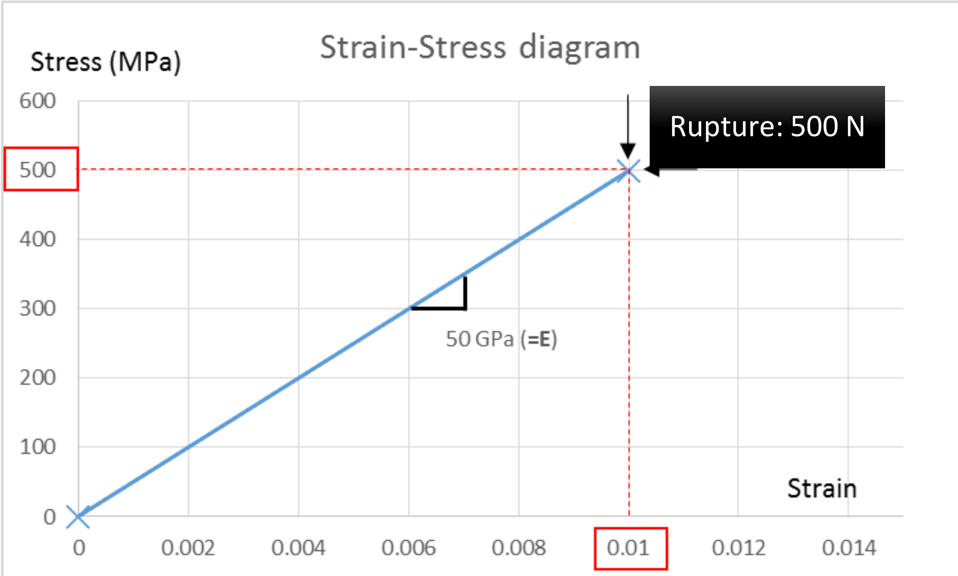

Fig 1b4.3 | Diagramme contrainte – déformation relative du matériau

Question Courte 1b5 – Barre Composite

Une barre de 50 mm de diamètre, 2000 mm de longueur, consiste en une section en acier, et une en aluminium, comme montré dans la figure ci-dessous.

Une force axiale F est imposée, et une jauge de contrainte sur la partie en aluminium indique une déformation relative de 0.000873. Les modules élastiques sont $E_{acier} = 200\ GPa$, $E_{alu} = 70\ GPa$.

1) Calculer F

2) calculez la longueur finale de la barre.

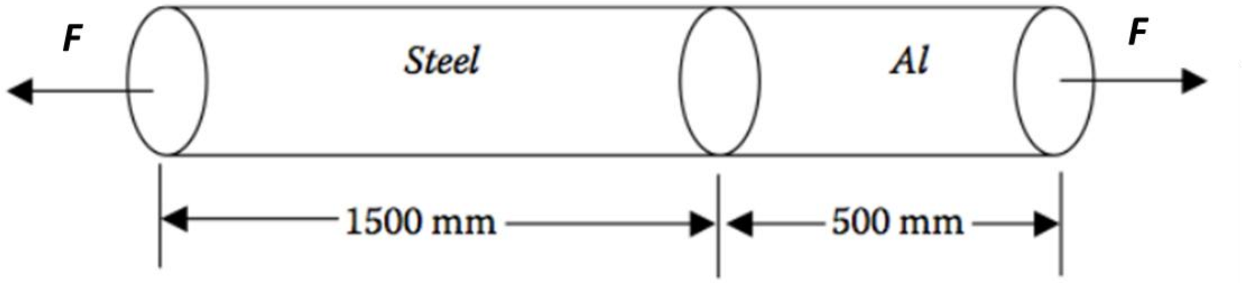

Fig 1b5.1 | Profil de la barre composite

Solution 1b5

Diagramme de forces

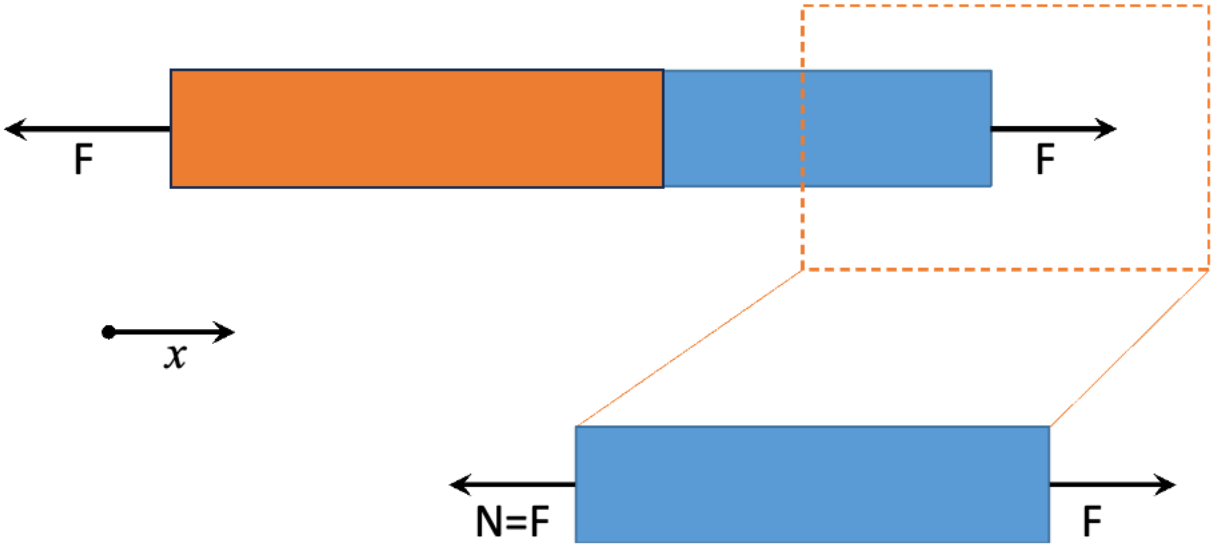

Fig 1b5.2 | Diagramme de forces. La barre est composé de 2 matériaux. La force interne est la même dans chaque matériau. La contrainte aussi (section identique). Mais la déformation relative sera différente dans les deux matériaux.

Objectifs

Valeur de la force appliquée (F)

Longueur finale de la barre

Paramètres donnés

Géométrie, longueur des matériaux, diamètre de la barre

Déformation pour l'aluminium

Module de Young pour l'acier et l'aluminium

Principes et formules

pour des systèmes 1D :

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_x$$

Loi de Hooke's pour des systèmes 1D :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

Contrainte :

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Condition d'équilibre, extraite de la Figure 0.0.3

$$F = N$$

Calculs

Loi de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{AE}$$

Ainsi:

$$F = N = A \cdot E_{Al} \cdot \varepsilon_{Al}$$

On peut alors obtenir le déplacement total en additionnant les déplacements de chaque segment:

$$\Delta L = \Delta L_{St} + \Delta L_{Al} = \varepsilon_{St} L_{St} + \varepsilon_{Al} L_{Al}$$

La déformation dans le segment en aluminium est connue (ε_{Al}) et la contrainte dans la section en acier peut être calculée, en sachant que la force interne N et l'aire A sont constantes le long de la barre. En combinant donc les équations on a:

$$\Delta L = \frac{\sigma_{st}}{E_{st}} L_{St} + \varepsilon_{Al} L_{Al} = \frac{N}{A \cdot E_{st}} L_{St} + \varepsilon_{Al} L_{Al} = \frac{E_{Al}}{E_{st}} \varepsilon_{Al} L_{St} + \varepsilon_{Al} L_{Al}$$

<u>Application numérique:</u>

$$F = 120\ k\mathrm{N}$$

$$\Delta L = 0.895\ mm$$

Question Courte 1b6 – Accordez votre instrument

Considérons une corde pour un instrument de musique. La corde est fixée à ses deux extrémités. La masse de la corde est de 500 mg. Sa longueur est de 328 mm. La corde a une section circulaire de rayon $r = 0.76\,mm$. Les matériaux sont dans le domaine élastique.

La fréquence de vibration de la corde, f_R, est donnée par $f_R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}}$, où F est la force de traction (T en Figure 1.b.1), m la masse de la corde et L la longueur de la corde. On néglige l'effet de la gravité.

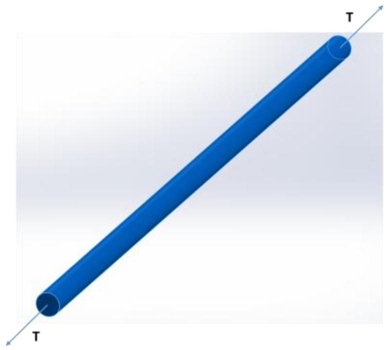

Fig 1b.6.1 | Corde sous une tension T

Déterminez la contrainte interne dans la corde pour obtenir le son LA$_4$ (fréquence de 440Hz), le son MI (659Hz) et le son SI (988Hz).

Que se passerait-il si on utilisait une corde de rayon r'=0.50 mm, mais avec la même masse que précédemment ? Commentez.

Solution 1b6

Objectif:

σ_{int}, la contrainte interne.

Paramètres donnés:

f, fréquence de vibration

r, rayon de la corde

L, longueur de la corde

m, masse de la corde

Formule:

$$f_R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi r^2}$$

Calcul:

Dans cet exercice, la corde est sous tension. Par conséquent, la contrainte doit être positive.

On peut déterminer la force de traction :

$$F = 4mLf_R^2$$

A l'équilibre des forces, on a donc:

$$|F| = |N| = 4mLf_R^2$$

En combinant les équations on trouve:

$$\sigma = \frac{4mLf_R^2}{\pi r^2}$$

Application numérique:

Pour $r = 0.76\ mm$:

$$\sigma_{LA} = 70\ MPa;\ \sigma_{Mi} = 157\ MPa;\ \sigma_{SI} = 353\ MPa$$

Pour $r = 0.5\ mm$:

$$\sigma_{LA} = 161\ MPa;\ \sigma_{MI} = 362\ MPa;\ \sigma_{SI} = 815\ MPa$$

Commentaire

On remarque que la contrainte interne pour chaque fréquence augmente lorsque le rayon diminue. A masse constante, une densité plus élevée est donc nécessaire pour un rayon plus petit.